BAREM DE CORECTARE
CLASA A XII-A

SUBIECTUL III

Fie $M=\left\{A(x)\middle|A(x)=\begin{pmatrix}1-x & 0 & x\\ 0 & 0 & 0\\ x & 0 & 1-x\end{pmatrix}, x\in\mathbf{R}\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}\right\}$.

a) Să se arate că $(M,\cdot)$ este grup abelian.

b) Să se calculeze simetricul elementului $A(2015)$.

c) Să se calculeze $A^n(x)$, $n\in\mathbf{N}^*$.

Soluție:

a) $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-2xy)$. Pentru $x\neq\frac{1}{2}$ și $y\neq\frac{1}{2}$ rezultă că $x+y-2xy\neq\frac{1}{2}$. 1p

Se verifică asociativitatea și comutativitatea. 1p

Se arată că elementul neutru este $A(0)$ 1p

Se arată că $A(x')=A\left(\frac{x}{2x-1}\right), x\neq\frac{1}{2}$ 1p

b) Simetricul lui $A(2015)$ este $A\left(\frac{2015}{4029}\right)$ 1p

c) $A^2(x)=A\left(\frac{1}{2}-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\right)$, $A^3(x)=A\left(\frac{1}{2}+4\left(x-\frac{1}{2}\right)^3\right)$ 1p

Prin inducție matematică se arată că $A^n(x)=A\left(\frac{1}{2}+(-2)^{n-1}\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)^n\right)$ 1p